Selección de Portafolio: Estimación No Paramétrica y Robusta

Autor:

Juan David Otálora.

Asesor:

Henry Laniado

Universidad EAFIT

Escuela de Economía y Finanzas

Medellín, Colombia

2019

Resumen

El modelo clásico de Markowitz es muy sensible a los errores de estimación de sus parámetros, genera grandes fluctuaciones de los pesos en cada rebalance y por lo tanto altos costos de transacción. En la siguiente monografía se evalúan técnicas no parámetricas y robustas con el fin de mejorar el modelo y corregir estos errores. El método para incorporar estas técnicas es reemplazar la estimación de la matriz de varianzas y covarianzas con herramientas alternativas. Para la estimación no paramétrica se reemplaza el coeficiente de correlación de Pearson por el de Kendall y el de Spearman, con el fin de tener otro tipo de correlaciones, y en la sección robusta se utiliza la matriz comediana.

Palabras clave: Selección de Portafolio; Métodos robustos; Métodos No Paramétricos; Finanzas Cuantitativas.

Abstract

The classic Markowitz model is very sensitive to estimation erros of its parameters. It generates high fluctuations in its weights after every rebalance, therefore high transaction costs. In this article we evaluate non parametric and robust techniques in order to improve the model and correct these errors. The method for incorporating these techniques consists in replacing the estimation of the variance and covariance matrix with alternative tools. For the nonparametric estimation we replace the Pearson correlation coefficient for the Kendall coefficient and the Spearman coefficient. In the robust section we replace it with the comedian matrix.

Keywords: Portfolio Selection; Robust Methods, Non parametric methods; Quantitative Finance

JEL Code:

G11 - Portfolio Choice; Investment Decisions.

Contenido

1. Planteamiento del problema

Harry Markowitz (1952) planteó el problema de optimización de portafolio basado en los momentos estadísticos (media y varianza) de los retornos de un conjunto de activos financieros, cambiando la manera de pensar el problema de selección de portafolio. Éste modelo se conoce como el modelo de media-varianza o modelo de Markowitz. El fundamento conceptual del modelo se basa en maximizar los retornos esperados del portafolio dado cierto nivel de riesgo, o del mismo modo, minimizar el nivel de riesgo dado un nivel de retornos esperados. El planteamiento que propone el modelo de Markowitz al problema de selección de portafolio fue fundamental para las finanzas, ya que permite obtener portafolios sobre la curva de Pareto. A partir de este modelo Harry Markowitz fundó la teoría moderna de selección de portafolio.

Sin embargo, el modelo Media-Varianza ha presentado problemas prácticos a los que se ha enfrentado la industria. Para obtener una solución en la vida real se tienen que estimar los momentos de los datos, que en este caso son los retornos de un conjunto de acciones en algún mercado bursátil. Éste modelo asume que los datos siguen una distribución normal y de esta manera se puede solucionar el problema con el método de máxima verosimilitud. Sin embargo, en la práctica, estimar los retornos esperados a partir de la media poblacional genera un estimador de éstos muy sensible a los datos, y este hecho puede sesgar la respuesta a un portafolio que no sea realmente óptimo (Merton, 1980). Es por esta razón que DeMiguel y cols. (2009) utilizan el problema de minimización de varianza, en lugar del problema inicialmente planteado. Tal como Jagannathan y Ma (2003) demostraron experimentalmente resultados con un buen nivel de retornos, así éstos no sean tenidos en cuenta. Este informe seguirá esta linea de investigación y solo tendrá en cuenta el problema de mínima varianza.

En la literatura se han involucrado técnicas no paramétricas al modelo de Markowitz para la obtención de un resultado mejorado (Briec y Kerstens, 2010; Iorio y cols., 2017;

Yao y cols., 2015). La tendencia de la investigación en finanzas afirma que éstas técnicas alternativas pueden solucionar el problema de error de estimación o tener una mejor relación entre retorno y riesgo del portafolio (Sharpe-ratio). Otro problema que presenta el modelo planteado originalmente es que utiliza implícitamente el coeficiente de correlación de Pearson para calcular la matriz de varianzas y covarianzas, por lo que la correlación entre activos es lineal. En este informe se pretende solucionar este problema utilizando métodos no paramétricos para calcular la correlación entre los activos y se pueda capturar más información acerca de la relación entre éstos.

Por otro lado, las técnicas robustas han permitido disminuir notablemente los costos de transacción y los errores de estimación (Serbin y Borkovec, 2011; Pae y Sabbaghi, 2014; Xidonas y cols., 2017). A pesar de que en el modelo de mínima varianza no se incluye la media, que representa los retornos esperados, en la función objetivo del problema de optimización, ésta se utiliza para calcular la matriz de varianzas y covarianzas que está incluida en la función objetivo, ya que a partir de ésta se obtiene la varianza del portafolio. Como se menciona anteriormente, estimar la media poblacional a partir de los datos genera un estimador notablemente sensible, en especial a datos atípicos. Es por ésta razón que se pretende incorporar un componente robusto a la estimación de la matriz de varianzas y covarianzas.

Por último, se evalúan los diferentes modelos alternativos que se obtengan en el proyecto con las métricas de desempeño: Sharpe ratio, turnover, desviación estándar y Sharpe ratio con costos de transacción del portafolio, los cuales dan información acerca de las mejoras de un modelo respecto a otro. A partir de estas métricas se busca responder a la siguiente pregunta general de investigación: ¿Los métodos no paramétricos o robustos aplicados a la estimación de la matriz de varianzas y covarianzas tiene un efecto positivo en cuanto a Sharpe-ratio, turnover, varianza y Sharpe-ratio con costos de transacción del portafolio?

2. Objetivos

2.1. Objetivo General

- Evaluar metodologías no paramétricas y robustas en la estimación de la matriz de varianzas y covarianzas, y aplicarlo al modelo de mínima varianza de Markowitz.

2.2. Objetivos Específicos

- Compilar y analizar bibliografía sobre estimación no paramétrica y robusta en el modelo MV.
- Implementar computacionalmente los modelos propuestos.
- Calcular las métricas de desempeño de cada portafolio obtenido.

3. Justificación

En términos generales, el problema de selección de portafolio es fundamental para las finanzas. A pesar de que el modelo de Markowitz es elegante teóricamente, hay una gran variedad de problemas en la práctica que afectan directamente al sector inversionista. Aportar a la teoría moderna de selección de portafolio, mejorando los modelos clásicos para casos donde se quiere incorporar información no lineal, o tener portafolio con menores costos de transacción es de gran importancia para la aplicación de estos en el sector inversionista. Explorar otras propiedades del modelo puede generar resultados superiores con bajo costo computacional.

Debido a que las técnicas no paramétricas y robustas aplicadas a la selección de portafolio necesitan adicionar restricciones y convierten al problema en uno más complejo, tanto teóricamente como computacionalmente. En este informe se hace uso del principio de parsimonia para introducir al problema técnicas no paramétricas y robustas que son sencillas de aplicar y que no requieren un costo computacional alto.

4. Marco Teórico

La teoría de selección de portafolio ha sido un tema principal en las investigaciones financieras. El modelo de media-varianza presentado por Markowitz (1952) fundó la teoría moderna de portafolio. Este modelo maximiza la diferencia entre el retorno esperado del portafolio y la varianza esperada del portafolio multiplicada por un coeficiente de aversión al riesgo. El resultado de este modelo es un vector de pesos que representa la manera en que el portafolio está diversificado entre los activos seleccionados. El autor afirma que el portafolio que se obtiene de dicho modelo se ubica dentro de la frontera de eficiencia, por lo que obtiene el mayor retorno esperado dado un nivel de riesgo, o lo que es lo mismo, un mínimo nivel de riesgo dado un nivel de retorno esperado. Por esta razón, este modelo también se conoce como el modelo media-varianza (MV) y generó un gran aporte a la teoría moderna de portafolio, ya que genera portafolio óptimos, si lo que se tiene en cuenta es el retorno esperado y el nivel de riesgo.

A pesar de la revolución que causó este modelo, ciertos problemas empezaron a surgir en la implementación práctica de éste. Por esta razón se ha intentado hacer mejoras técnicas con el fin de tener un mejor desempeño. En Merton (1980) el autor investiga una forma de calcular el retorno esperado del mercado a partir de un modelo que tiene en cuenta los cambios en el riesgo de mercado. La propuesta del autor incorpora el exceso de retorno esperado. A su vez, muestra que el modelo CAPM no es una buena estimación y que al estimar los parámetros de este modelo, que son los momentos estadísticos de los retornos de los activos, se ha desviado cuando se aplica en la práctica. Los autores reconocen que estimar retornos esperados de series de tiempo es una tarea difícil, más aún si se considera un retorno esperado que cambia con el tiempo. Estimar las varianzas y covarianzas es más sencillo o más preciso de estimar que el retorno esperado. De hecho, la estimación de los momentos a partir de las series de tiempo de los activos requiere que las distribuciones de probabilidad de éstas sigan una distribución normal, ya que éstos se estiman por el método de máxima verosimilitud. En este sentido, Jobson y cols. (1980) hacen un recuento del modelo de Markowitz y se preocupan por las distribuciones de la muestra y la distribución asintótica de los pesos, la media y la varianza, es decir, de los estimadores. Los autores encontraron que las distribuciones de los estimadores son aproximadamente normales para una muestra mayor a 300.

Una de las formas de reducción del error de estimación es que el modelo MV cuente con restricciones que lo controlen. Imponer restricciones en un modelo MV puede parecer contra intuitivo, pero en la práctica tiene sentido ya que el retorno esperado y el riesgo son desconocidos. La estimación del retorno esperado está sesgado para arriba y el de la covarianza está sesgado para abajo. Adicionar una restricción de una cota superior a los pesos del portafolio puede ayudar a reducir este error de estimación (Frost y Savarino, 1988). Los autores demuestran, a partir de simulaciones, que imponer cotas superiores en los pesos del portafolio reduce el error de estimación y mejora el desempeño.

Sin embargo, Michaud (1989) muestra que en términos generales se puede tener una perspectiva positiva, realizando mejoras especificas en el modelo. Es por esto que presenta estos puntos a favor del modelo MV: 1) Satisfacción de los objetivos y restricciones de los clientes, 2) control de la exposición al riesgo del portafolio, 3) implementación del estilo de los objetivos y del pronóstico del mercado, 4) Uso eficiente de la información de inversión, 5) Cambios pertinentes a tiempo en el portafolio. A pesar de lo anterior, afirma que el MV maximiza el error de estimación, ya que le da los activos con mayor retorno esperado un mayor peso, y éstos coinciden con los estimadores con mayor error de estimación. Para solucionar lo anterior, de igual manera, recomiendan restricciones de venta en corto. Por esta razón este modelo puede subestimar el nivel de riesgo del portafolio óptimo.

Se deben tener en cuenta restricciones de costos de transacción y de la industria para generar portafolios más significativos en el sentido financiero. De igual manera, Jagannathan y Ma (2003) demuestran que imponer restricciones de no negatividad tiene un efecto positivo sobre la eficiencia en la práctica. Muestran que adicionar la restricción de no negatividad es equivalente a reducir en una proporción la covarianza de este activo respecto a los otros. Los autores estudian las cotas superiores de igual manera para demostrar que son buenas en la práctica, de la misma forma que la restricción de no negatividad, pero en sentido inverso. Prueban que la última no tiene un cambio significativo si la primera no se incluye, es decir, la restricción de no negatividad. A partir de simulaciones demuestran que imponer restricciones de no negatividad es positivo así éstas sean impuestas erróneamente, es decir, que la solución del modelo tenga grandes pesos negativos. Adicionar restricciones de no negatividad también genera que el número de activos seleccionados por el modelo sea proporcionalmente pequeño al número total de activos tenidos en cuenta. La manera de solucionar este problema es imponer cotas superiores a los pesos del modelo. Los autores Jagannathan y Ma (2003) afirman (pag. 1652):

"El error de estimación en la media muestral es tan grande que no se pierde mucho ignorando la media cuando no hay ninguna información relevente sobre la media muestral."

Para tener una noción de la importancia de los errores de estimación, (Chopra y Ziemba, 1993, pag. 7) afirman que : *"Los errores en la estimación de la media son aproximadamente diez veces más importantes que los errores de estimación de la varianza y covarianza. De la misma manera, los errores de varianza son el doble de importantes que los errores de covarianza."*.

En Britten-Jones (1999) los autores implementan un método de estadística inferencial para medir la significancia estadística de los pesos en un modelo de MV, basado en los mismo métodos que se utilizan para la regresión lineal de mínimos cuadrados. Los resultados muestran que estos pesos del modelo MV tienen un gran error de estimación. Los autores construyen un test a partir de la distribución F donde testean que los pesos de el portafolio tangente a la frontera de eficiencia sean los mismos que los pesos del portafolio obtenido. Best y Grauer (1992) investigan la sensibilidad del resultado del modelo MV analizándolo como un modelo de programación cuadrática y paramétrico, y a partir de la solución analítica de éste, en términos de media, varianza y covarianza, exponen la notable sensibilidad del vector de pesos resultantes a cambios en la estimación de los momentos estadísticos de los activos.

Otro enfoque en el que se ha incursionado en la literatura de selección de portafolio es en el de modificar la estimación de la matriz de varianzas y covarianzas, el cual se tomará en esta investigación. En la literatura este enfoque inició con Best y Grauer (1992) y Chan y cols. (1999) donde se estudia el segmento de la matriz de varianzas y covarianzas que tiene, a partir del modelo MV, un vector de pesos donde todos son positivos, mostrando una sección de la frontera de eficiencia donde estas condiciones se cumplen. Los segundos muestran nuevas formas de pronosticar los segundos momentos estadísticos del portafolio en cuestión a partir de un modelo de factores que tiene en cuenta características del mercado como el tipo, el tamaño y el valor en libros de la renta variable. El énfasis en la estimación de la varianza del portafolio sugiere tener en cuenta un modelo de mínima varianza en lugar del modelo MV original.

De esta forma, fue de gran importancia centrarse en la reconsideración del método de estimación de la matriz de varianzas y covarianzas, ya que es donde se centra el error de estimación del modelo de mínima. Como exponen Ledoit y Wolf (2004b) el estimador muestral de la matriz de varianzas y covarianzas no está bien condicionado cuando se tiene un número considerable de activos, lo que genera un error de estimación superior cuando se calcula la inversa de este estimador. Los autores Ledoit y Wolf (2004a) proponen un estimador que es una combinación lineal convexa del estimador muestral y la matriz identidad, el cual, en un marco de asintoticidad general, es más preciso y mejor condicionado que el estimador muestral. Los adelantos más recientes en modificación de la estimación en la matriz de varianzas y covarianzas incluyen el trabajo de Goto y Xu (2015) donde se convierte la matriz de varianzas y covarianzas estimada en una matriz dispersa, restringiendo el valor absoluto de los elementos por fuera de la diagonal de la matriz, a partir del algoritmo glasso, lo cual genera que la relación de cobertura entre los activos tienda a cero, si estos no son significativos. El resultado de la anterior implementación es una reducción importante en el riesgo del portafolio.

La necesidad de técnicas no paramétricas se ve reflejada en el trabajo de Briec y Kerstens (2010). El modelo MV sólo le da importancia a los dos primeros momentos estadísticos de los retornos de los activos, lo autores reconocen pertinente tener en cuenta la asimetría y la curtosis. Debido a que los retornos de los activos no siguen una distribución normal, lo que genera perdida de validez del modelo de Markowitz. Los autores introducen los momentos estadísticos superiores al modelo MV a partir de una función de venta en corto la cual es una estimación de la cota inferior de la frontera de eficiencia, donde es proyectado el portafolio óptimo que genera el modelo. Siguiendo con la aplicación de técnicas no paramétricas al modelo MV, Iorio y cols. (2017) los autores construyen portafolios con técnicas no paramétricas de clustering, basándonse en p-splines, los cuales dividen la muestra de retornos en varias clases de las cuales se seleccionan los portafolios con características específicas. Esta técnica es no paramétrica ya que no asume ninguna distribución para los datos, además no se necesitan supuestos fuertes como la estacionariedad ó la normalidad. Más recientemente, Yao y cols. (2015) proponen un método no paramétrico para resolver el modelo de optimización de portafolio safety-first, utilizando la estimación de kernel suave. El objeto que se estima es la función de distribución de los retornos, la cual se resuelve numéricamente de manera eficiente computacionalmente. Los autores resaltan las ventaja que tiene la técnica no paramétrica en cuanto a que no tiene que realizar supuestos sobre las distribuciones de probabilidad de los retornos.

Por otro lado, la aplicación de técnicas robusta a la estimación del modelo MV ha sido fundamental para solucionar problemas de error de estimación y costos de transacción. Como Serbin y Borkovec (2011) recuenta que en la literatura de la optimización robusta aplicada al problema de optimización de portafolio, se incorporan la distribución de los errores de estimación directamente en la función objetivo. Esta metodología elige el mejor de los peores posibles portafolios. Los autores proponen una metodología robusta donde incorporan una función de penalidad para los costos de transacción en la función objetivo. A partir de la estimación robusta del modelo que proponen, realizan una comparación con la modelación de la incertidumbre de los retornos esperados de los activos y evalúan la posible articulación de ambas metodologías.

Pae y Sabbaghi (2014) reconocen la importancia de incluir restricciones de costos de transacción en el modelo de optimización de portafolio ya que estos afectan la solución del modelo. El autor asume que los retornos siguen una distribución log-normal, implementando las restricciones de costos de transacciones, las cuales son lineales, en un modelo log-robusto de optimización de portafolio, el cual se linealiza para poder incluir las restricciones de costos de transacción y tener una aplicación práctica efectiva. El modelo lineal que se aproxima al modelo de optimización log-robusto, imita el segundo y reduce significativamente los costos de transacción. Según Xidonas y cols. (2017) la optimización robusta de portafolio requiere múltiples restricciones que hacen del modelo más complejo y de implementación más pesada, por lo que buscan un equilibrio entre complejidad y corrección robusta de los errores de estimación del modelo MV típico. Los autores proponen un modelo de estimación robusta incorporando la optimización multi-objetivo, con el fin de construir una frontera de eficiencia robusta. Los autores utilizan el criterio de arrepentimiento minimax para identificar las áreas robustas de la frontera de eficiencia.

A partir de la compilación anterior de referencias, se resume en cuatro partes el enfoque de la siguiente investigación: imponer restricciones en los pesos reduce el error de estimación, el modelo de mínima varianza es más pertinente que el original para evitar objetos donde se requiere estimar la media poblacional, los métodos no paramétricos han tenido un efecto positivo en cuanto a no tener que asumir una distribución de probabilidad específica y por último, los métodos robustos solucionan el problema de costos de transacción y alto riesgo del portafolio.

5. Hipótesis

1. La estimación propuesta genera portafolios con pesos menos volátiles, lo que implica menores costos de transacción.

2. El Sharpe-ratio con costos de transacción sobresale en las estrategias planteadas en éste trabajo.

6. Metodología

La metodología consiste en sustituir la manera de estimar la matriz de varianzas y covarianzas por estimaciones no paramétrica y robusta de ésta. Para la estimación no paramétrica se utilizan el coeficiente de correlación de Kendall y el coeficiente de correlación de Spearman, y para la estimación robusta se utilizará la matriz comediana. Además, se considera el método de contracción de matriz de varianzas y covarianzas planteado en Ledoit y Wolf (2004a) y una alternativa para la restricción de la segunda norma de los pesos planteado en DeMiguel y cols. (2009).

6.1. Modelo de Markowitz: Mínima Varianza

El modelo de mínima varianza es un problema de optimización cuadrática, que minimiza la varianza del portafolio, la cual se encuentra en la función objetivo como se presenta a continuación:

$$\begin{array}{rrcl} \min\limits_{w} & w'\hat{\Sigma}w & & \\ \text{s.t.} & \sum\limits_{i=1}^{N} w_i & = & 1 \\ & (w_j & \geq & 0, \forall j)^1 \end{array} \tag{1}$$

donde w es el vector de pesos, N es el número de activos y Σ es la matriz de varianzas y covarianzas, la cual se estima de la siguiente manera:

[1]Las estrategias van a ser evaluadas tanto con esta restricción como sin ésta. Esta restricción representa las ventas en corto.

$$\hat{\Sigma}_{x,y} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{T}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), \forall x, y \tag{2}$$

6.2. Estimación Robusta

Para la estimación de la matriz de varianzas y covarianzas de manera robusta se hace uso de la matriz comediana, la cual es análoga a la matriz de varianzas y covarianzas, pero sustituyendo la mediana en lugar de la media. La matriz comediana se estima de la siguiente manera:

$$\hat{\Sigma}^{r}_{i,j} = \text{Mediana}(x_i - \text{Mediana}(x_i))(x_j - \text{Mediana}(x_j)), \forall i, j \tag{3}$$

esta estimación fue introducida por Falk (1997).

6.3. Estimación No paramétrica

Para estimar la matriz de varianzas y covarianzas de la manera no paramétrica derivamos la covarianza entre dos variables como el coeficiente de correlación multiplicado por la desviación estándar de ambas. Reemplazamos el coeficiente de correlación de Pearson por los coeficientes de correlación no paramétricos de Kendall y Spearman como se muestra a continuación:

$$\hat{\Sigma}^{np}_{i,j} = \rho\sigma_{x_i}\sigma_{x_j}, \forall i, j \tag{4}$$

donde

- ρ: Correlación de Spearman/Kendall
- σ_i: Desviación estandar

6.3.1. Correlación de Kendall

La correlación de Kendall es usada para calcular la relación ordinal entre las variables. Ésta se estima de la siguiente forma:

$$\rho_k = \frac{n_c - n_d}{0{,}5n(n-1)} \tag{5}$$

donde n es el número de observaciones, n_c es el número de pares concordantes y n_d es el número de pares discordantes. Cualquier par de datos (x_i, y_i) y $((x_j, y_j))$ son concordantes si $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ y discordante si $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$ (Chen y Popovich, 2002, cap. 6,pag. 82).

6.3.2. Correlación de Spearman

La correlación de spearman es una medida de correlación no lineal, la cual es menos sensible que la correlación de Pearson. Ésta se estima con la siguiente fórmula:

$$\rho_s = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)} \tag{6}$$

donde d es la diferencia entre los rangos correspondientes a los valores de las dos variables donde los rangos se pueden asignar ordenando la variable dependiendo de su retorno, y n es el número de observaciones. La definición de ésta medida de correlación se encuentra en (Chen y Popovich, 2002, cap. 4,pag. 31)

6.4. Contracción de Ledoit y Wolf

Con el fin de reducir el error de estimación de la matriz de varianzas y covarianzas, utilizamos la metodología propuesta por Ledoit y Wolf (2004a) la cual contrae la matriz de varianzas y covarianzas hacia una matriz con valores más centrales, pero manteniendo las propiedades de la matriz inicial. En términos prácticos, se calcula una combinación lineal entre la matriz inicial y la matriz identidad , como se puede observar en la siguiente fórmula:

$$\hat{\Sigma}_{LW} = \delta I + (1-\delta)\hat{\Sigma} \tag{7}$$

donde $\hat{\Sigma}_{lw}$ es la matriz contraida de Ledoit y Wolf (2004a), $\hat{\Sigma}$ es la matriz de varianzas y covarianzas estimada para cada estrategia, I es la matriz identidad y δ es un número entre 0 y 1 que le da peso a cada matriz. El δ se elige de tal forma que se minimice la distancia entre la matriz contraída estimada y la matriz de varianzas y covarianzas poblacional. Además, como menciona Falk (1997), al estimar la matriz comediana se puede obtener una matriz que no es semidefinida positiva, lo cual impide solucionar el problema de optimización. Sin embargo, la contracción de Ledoit y Wolf (2004a) soluciona éste problema.

6.5. Restricción de los pesos

Siguiendo el trabajo de DeMiguel y cols. (2009) se impone una restricción en la segunda norma de los pesos. Los autores estiman un parámetro que cumple el papel de cota superior para la restricción de la segunda norma de los pesos. En la estrategia propuesta se utiliza un parámetro fijo, el cual depende del número de activos. Es evidente que la segunda norma más pequeña corresponde con la norma de la selección del portafolio Naive. En consecuencia, la segunda norma de los pesos será necesariamente mayor a la segunda norma de los pesos iguales. La generalización de la norma de orden p aumenta a medida que p disminuye, por lo que se busca un $1 < p < 2$ que ajuste la holgura de la segunda norma de los pesos, en la medida en que se mejore el turnover sin disminuir significativamente el Sharpe-ratio. [2]

En éste orden de ideas, utilizamos la restricción de que la segunda norma sea menor a la norma p de la estrategia Naive. Por lo tanto el modelo final tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \min_{w} \quad & w'\hat{\Sigma}w \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \\ & \|w\|^2 \leq \left\|\tfrac{1}{N}\right\|^p \\ & (w_j \geq 0, \forall j) \end{aligned} \tag{8}$$

donde $\|w\|^2$ es la segunda norma de los pesos y $\left\|\frac{1}{N}\right\|^p$ es la norma p de los pesos de la estrategia Naive.

[2]Se restringe inferiormente p a 1, ya que a medida que p se acerca a 1 la norma de orden p se va volviendo más grande y la restricción pierde su efecto de restringir la segunda norma de los pesos.

Tabla **1**: Lista de Portafolios considerados

Estrategia	**Abreviación**
Mínima varianza con ventas al corto	MVU
Mínima varianza sin ventas al corto	MVC
Pesos iguales (1/N)	NAIVE
Ledoit & Wolf con ventas al corto	LWU
Ledoit & Wolf sin ventas al corto	LWC
Ledoit & Wolf estimación con correlación Kendall con ventas al corto	LWKendall U
Ledoit & Wolf estimación con correlación Kendall sin ventas al corto	LWKendall C
Ledoit & Wolf estimación con correlación Spearman con ventas al corto	LWSpearman U
Ledoit & Wolf estimación con correlación Spearman con ventas al corto	LWSpearman C
Ledoit & Wolf estimación con correlación Comedian con ventas al corto	LWComedian U
Ledoit & Wolf estimación con correlación Comedian con ventas al corto	LWComedian C
Ledoit & Wolf estimación con correlación Kendall, con restricción de norma y sin ventas al corto	LWKendall NC C
Ledoit & Wolf estimación con correlación Spearman, con restricción de norma y sin ventas al corto	LWSpearman NC C
Ledoit & Wolf estimación con correlación Comedian, con restricción de norma y sin ventas al corto	LWComedian NC C
Ledoit & Wolf estimación con correlación Kendall, con restricción de norma y con ventas al corto	LWKendall NC U
Ledoit & Wolf estimación con correlación Spearman, con restricción de norma y con ventas al corto	LWSpearman NC U
Ledoit & Wolf estimación con correlación Comedian, con restricción de norma y con ventas al corto	LWComedian NC U

6.6. Métricas para la evaluación del desempeño

Con el fin de medir el desempeño de las estrategias se utiliza el método de rolling horizon el cual estima la estrategia para cada ventana de tiempo de longitud $\tau = 120$. Para cada ventana se calculan las siguientes métricas:

$$\hat{\mu_i} = \frac{1}{T-\tau}\sum_{t=\tau}^{T-1} w_t^{i'} r_{t+1} \tag{9}$$

$$\hat{\sigma_i} = \sqrt{\frac{1}{T-\tau-1}\sum_{t=\tau}^{T-1}(w_t^{i'} r_{t+1} - \hat{\mu_i})^2} \tag{10}$$

$$SR = \frac{\hat{\mu_i}}{\hat{\sigma_i}} \tag{11}$$

$$Turnover = \frac{1}{T-\tau-1}\sum_{t=\tau}^{T-1}\sum_{j=1}^{N}(|w_{j,t+1}^{i} - w_{j,t^+}^{i}|) \tag{12}$$

$$Turnover_t = \sum_{j=1}^{N}(|w_{j,t+1}^{i} - w_{j,t^+}^{i}|) \tag{13}$$

$$SR2 = \frac{\frac{1}{T-\tau}\sum_{t=\tau}^{T-1}(w_t^{i'} r_{t+1} - |w_t^{i'} r_{t+1} * Turnover_t|)}{\hat{\sigma_i}} \tag{14}$$

La fórmula (9) representa el promedio de los retornos de la estrategia i de cada venta, donde r_{t+1} es el vector de retornos del conjunto de activos en el periodo $t+1$, la fórmula (10) representa la desviación estándar de los mismos, la fórmula (11) es el Sharpe-ratio de cada esperanza que se calcula mediante la relación entre el promedio de los retornos de cada ventana y su desviación estándar, la fórmula (12) de la métrica Turnover, donde $w_{j,t+1}^{i}$ representa el vector de pesos de la estrategia i en el periodo $t+1$ y w_{j,t^+}^{i} es el vector de pesos de la estrategia i en el periodo $t+1$, pero antes de rebalancear. Por último, la fórmula (14) es el Sharpe-ratio teniendo en cuenta los costos de transacción, donde a medida que aumenta el turnover de cada periodo de tiempo, este indicador disminuye, por lo que descuenta los costos de transacción incurridos.

6.7. Descripción de datos

Los datos que se utilizan para el modelo son los datos financieros de Kenneth French. Estos datos están organizados por industrias en dos grupos: el primero representa la industria de Estados Unidos en 10 acciones de la bolsa y el segundo en 48 acciones de la bolsa. Además, otros dos grupos de 6 acciones organizadas por tamaño y valor en el mercado y otro grupo de 25 acciones de igual manera organizadas por tamaño y valor en el mercado.[3] Los datos tienen una frecuencia mensual desde 07/1963 hasta 12/2004. Elegimos estos datos ya que es común en la literatura utilizarlos, y de esta forma podemos hacer comparaciones directas con los modelos de la literatura, específicamente con los modelos de mínima varianza, el modelo propuesto en Ledoit y Wolf (2004a) y el modelo de pesos iguales Naive.

7. Resultados Esperados

Se espera que las nuevas metodologías reduzcan la varianza del portafolio y del vector de pesos, más aún para casos donde los datos no tengan una distribución normal y contengan datos atípicos, es decir, casos de la vida real, disminuyendo así los costos de transacción del portafolio. A su vez, se espera obtener un turnover inferior y un Sharpe ratio con costos de transacción superior al de los modelos clásicos.

8. Resultados

En la siguiente sección se presentan los resultados de las estrategias propuestas en la literatura y se contrastan con las estrategias planteadas en éste trabajo. El valor del orden p de la norma en la restricción planteada en el modelo 8 es 1.7, ya que ésta norma genera los mejores resultados robustos para $1 < p < 2$.

La tabla **2** muestra los Sharpe ratio de los portafolios obtenidos por dichas estrategias.

[3]Los datos se pueden encontrar en el siguiente enlace:
$http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data\_library.html$

Como podemos observar, en la mayoría de los casos las estrategias con mayor Sharpe ratio son las que permiten ventas en corto debido a que tienen más libertad en los cambios de pesos. Las estrategias desarrolladas en este trabajo muestran Sharpe ratios altos en la mayoría de los casos. Sin embargo, el interés central se centra en la disminución de los costos de transacción manteniendo un Sharpe ratio teniendo en cuenta estos costos.

Tabla **2**: Sharpe Ratio de los portafolios para cada conjunto de activos

Estrategia	**6FF**	**25FF**	**10Ind**	**48Ind**
MVU	0.3615	0.509	0.2876	0.1963
MVC	0.2674	0.3055	0.2829	0.2767
NAIVE	0.2626	0.2692	0.257	0.2416
LWU	0.3218	0.4706	0.2962	0.2502
LWC	0.2655	0.3073	0.288	0.2812
LWKendall C	0.2685	0.3017	0.3006	0.2842
LWKendall U	0.2871	0.3642	0.303	0.2769
LWSpearman C	0.2693	0.309	0.2941	0.2773
LWSpearman U	0.3189	0.454	0.2985	0.2245
LWComedian C	0.2669	0.2923	0.2853	0.2675
LWComedian U	0.2615	0.2834	0.283	0.2641
LWKendall NC C	0.2798	0.3053	0.2905	0.2628
LWKendall NC U	0.2844	0.3148	0.2900	0.2619
LWSpearman NC C	0.2818	0.3054	0.2897	0.2622
LWSpearman NC U	0.2867	0.3163	0.2889	0.2609
LWComedian NC C	0.2725	0.2944	0.2796	0.2527
LWComedian NC U	0.2745	0.2998	0.2793	0.2518

Fuente: Resultados de los autores

La tabla **3** muestra las desviaciones estándar de los portafolios obtenidos para los cuales no hay mucha variabilidad entre las diferentes estrategias. Los portafolios con menor desviación estándar corresponden a las estrategias LWKendall U y LWSpearman U.

Debido a que la estrategia Naive cuenta en todos los casos con la mayor desviación estándar, las estrategias LWKendall NC, LWSpearman NC y LWComedian NC aumentan la desviación de sus portafolios ya que la restricción de la norma las contrae hacia esta estrategia.

Tabla **3**: Desviación Estándar de los portafolios para cada conjunto de activos

Estrategia	**6FF**	**25FF**	**10Ind**	**48Ind**
MVU	0.0402	0.0384	0.0375	0.0437
MVC	0.0444	0.0448	0.0373	0.0373
NAIVE	0.0493	0.053	0.0434	0.0487
LWU	0.0402	0.0362	0.0367	0.0382
LWC	0.0442	0.0446	0.0372	0.0374
LWKendall C	0.0442	0.045	0.0372	0.0384
LWKendall U	0.0425	0.0405	0.0368	0.0368
LWSpearman C	0.0442	0.0446	0.0369	0.0378
LWSpearman U	0.0402	0.0367	0.0363	0.0378
LWComedian C	0.0451	0.0465	0.0394	0.0436
LWComedian U	0.0446	0.047	0.0393	0.0418
LWKendall NC C	0.0491	0.0469	0.0386	0.0425
LWKendall NC U	0.0448	0.0465	0.0386	0.0424
LWSpearman NC C	0.045	0.0469	0.0387	0.0426
LWSpearman NC U	0.0448	0.0465	0.0387	0.0425
LWComedian NC C	0.0461	0.0479	0.04	0.0453
LWComedian NC U	0.0460	0.0476	0.0400	0.0453

Fuente: Resultados del autor

La tabla **4** expone los turnover estimados de los portafolios. Para ésta investigación, esta métrica es fundamental ya que mide los costos de transacción promedio que se incurren en el portafolio específico. La estrategia de reducir los costos de transacción restringe la capacidad de aumentar o disminuir los precios, por lo que se observa una disminución en el Sharpe ratio. Sin embargo, la disminución de la ganancia en términos de retorno se ve reducida cuando los costos de transacción son muy altos. Como se puede observar en la tabla **4** las estrategias que presentan menor turnover en sus portafolios son las propuestas por en esta investigación, exceptuando el portafolio Naive que evidentemente cuenta con los menores turnover ya que no incurre en cambio de los pesos del portafolio.

Tabla **4**: Turnover de los portafolios para cada conjunto de activos

Estrategia	**6FF**	**25FF**	**10Ind**	**48Ind**
MVU	0.5573	2.1352	0.19	0.8768
MVC	0.0522	0.0852	0.0483	0.0633
NAIVE	0.0027	0.0007	0.0024	0.0006
LWU	0.1205	0.3973	0.1139	0.3748
LWC	0.0407	0.0659	0.0476	0.0647
LWKendall C	0.0247	0.0471	0.0351	0.0605
LWKendall U	0.034	0.1144	0.0426	0.1365
LWSpearman C	0.0406	0.072	0.0481	0.0719
LWSpearman U	0.1188	0.3935	0.1061	0.3701
LWComedian C	0.0502	0.0927	0.0526	0.0742
LWComedian U	0.1112	2.8926	0.0889	1.3085
LWKendall NC C	0.0154	0.0228	0.0211	0.0331
LWKendall NC U	0.0134	0.0237	0.0214	0.0379
LWSpearman NC C	0.0164	0.0217	0.0224	0.0333
LWSpearman NC U	0.0121	0.0217	0.0225	0.0387
LWComedian NC C	0.032	0.0514	0.0418	0.0507
LWComedian NC U	0.0313	0.0557	0.0435	0.0545

Fuente: Resultados del autor

Por último, la tabla **5** presenta los Sharpe ratio de los portafolio teniendo en cuenta los costos de transacción. Las estrategias que cuentan el mayor Sharpe ratio con costos de transacción en la mayoria de los casos son las estrategias LWKendall NC y LWSpearman

NC, ambas con ventas en corto y sin ventas en corto. La estrategia LWComedian NC presenta Sharpe ratios mayores a la estrategia de mínima varianza. Las estrategias de mínima varianza con ventas en corto, las cuales presentaban el mayor Sharpe ratio, como se observar en la tabla **2**, cuenta con los menores Sharpe ratio con costos de transacción, debido a su alto turnover.

Tabla **5**: Sharpe Ratio con costos de transacción de los portafolios (SR2)

Estrategia	**6FF**	**25FF**	**10Ind**	**48Ind**
MVU	-0.1948	-2.9558	0.1104	-0.5512
MVC	0.2222	0.2338	0.2387	0.2234
NAIVE	0.2549	0.2626	0.2511	0.2351
LWU	0.1915	0.0433	0.1907	-0.0734
LWC	0.2282	0.2503	0.2453	0.2259
LWKendall C	0.2443	0.2593	0.2696	0.2331
LWKendall U	0.2548	0.2636	0.2651	0.1645
LWSpearman C	0.2322	0.2461	0.2518	0.2177
LWSpearman U	0.1985	0.0558	0.2012	-0.0761
LWComedian C	0.2205	0.2127	0.2369	0.1988
LWComedian U	0.1641	-2.8456	0.1999	-1.0663
LWKendall NC C	0.2628	0.2827	0.2704	0.2331
LWKendall NC U	0.2693	0.2920	0.2696	0.2284
LWSpearman NC C	0.264	0.2836	0.2684	0.2325
LWSpearman NC U	0.2727	0.2952	0.2676	0.2269
LWComedian NC C	0.2414	0.2474	0.2408	0.2064
LWComedian NC U	0.2438	0.2495	0.2385	0.2018

Fuente: Resultados del autor

9. Conclusiones

En la presente monografía se implementaron técnicas tanto no paramétricas como robustas para la estimación de la matriz de varianzas y covarianzas de los retornos de un conjunto de activos, y se aplicaron al modelo de mínima varianza de Markowitz. Además, las estrategias se complementaron con la métodología de encogimiento presentada en Ledoit y Wolf (2004a), y se restringió la segunda norma de los pesos con una metodología similar a la presentada en DeMiguel y cols. (2009). Para la estimación de la matriz de varianzas y covarianzas con las ténicas no paramétricas se utilizaron los coeficientes de correlación de Kendall y Spearman, y a partir de estos se estimó dicha matriz. La técnica robusta que se utilizó para estimar la matriz fue la matriz comediana.

Las estrategias se prueban con cuatro bases de datos financieros con diferente número de activos, con la metodología rolling horizon. Los resultados muestran que las estrategias con más altos Sharpe ratio por lo general presentan altos costos de transacción, en consecuencia la ganacia del retorno se ve disminuida. Las estrategias presentadas en la anterior monografía generan portafolios con bajos turnover y altos Sharpe ratio con costos de transacción, notablemente en las estrategias no paramétricas, y resultados aceptable en la estrategia robusta.

Referencias

Best, M. J., y Grauer, R. R. (1992). Positively Weighted Minimum-Variance Portfolios and the Structure of Asset Expected Returns. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, *27*(4), 513–537.

Briec, W., y Kerstens, K. (2010). Portfolio selection in multidimensional general and partial moment space. *Journal of Economic Dynamics and Control*, *34*(4), 636–656.

Britten-Jones, M. (1999). The sampling error in estimate of mean-variance portfolio weights. *Journal of Finance*, *54*(2), 655–671.

Chan, L. K. C., Karceski, J., y Lakonishok, J. (1999). Nber Working Paper Series on Portfolio Optimization: Forecasting Co Variances and Choosing the Risk Model. (5), 937–974.

Chen, P. Y., y Popovich, P. M. (2002). Correlation: Parametric and nonparametric measures. En (caps. 3,6). Sage Publications.

Chopra, V. K., y Ziemba, W. T. (1993). The Effect of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice. *The Journal of Portfolio Management*, *19*(2), 6–11.

DeMiguel, V., Garlappi, L., Nogales, F., y Uppal, R. (2009). A generalized approach to portfolio optimization: Improving performance by constraining portfolio norms. *Management Science*, *55*(5), 798-812.

Falk, M. (1997). On mad and comedians. , *49*(4), 615–644.

Frost, P., y Savarino, J. (1988). For better performance: Constrain portfolio weights. *The Journal of Portfolio Management*, *15*(1), 29–34.

Goto, S., y Xu, Y. (2015). Improving Mean Variance Optimization through Sparse Hedging Restrictions. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, *50*(6), 1415–1441.

Iorio, C., Frasso, G., D'Ambrosio, A., y Siciliano, R. (2017). A P-spline based clustering approach for portfolio selection. *Expert Systems with Applications*, *95*, 88–103.

Jagannathan, R., y Ma, T. (2003). Risk Reduction in Large Portfolios: Why Imposing the Wrong Constraints Helps. *The Journal of Finance*, *58*(4), 1651–1683.

Jobson, A. J. D., Korkie, B., Jobson, J. D., y Korkie, B. (1980). Estimation for Markowitz Efficient Portfolios. , *75*(371), 544–554.

Ledoit, O., y Wolf, M. (2004a). Honey, i shrunk the sample covariance matrix. *The Journal of Portfolio Management*, *30*(4), 110-119.

Ledoit, O., y Wolf, M. (2004b). A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices. *Journal of Multivariate Analysis*, *88*(2), 365–411.

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, *7*(1), 77-91.

Merton, R. C. (1980). On estimating the expected return on the market. *Journal of Financial Economics*, *8*(4), 323–361.

Michaud, R. O. (1989). The Markowitz Optimization Enigma: Is 'Optimized' Optimal? *Ssrn*, 31–42.

Pae, Y., y Sabbaghi, N. (2014). Log-robust portfolio management after transaction costs. *OR Spectrum*, *36*(1), 95–112.

Serbin, V., y Borkovec, M. (2011). Robust Portfolio Rebalancing with Transaction Cost Penalty – An Empirical Analysis. *Journal Of Investment Management*, *9*(2), 73–87.

Xidonas, P., Mavrotas, G., Hassapis, C., y Zopounidis, C. (2017). Robust multiobjective portfolio optimization: A minimax regret approach. *European Journal of Operational Research*, *262*(1), 299–305.

Yao, H., Li, Y., y Benson, K. (2015). A smooth non-parametric estimation framework for safety-first portfolio optimization. *Quantitative Finance*, *15*(11), 1865–1884.